

「 \ll 」は、ここで「大抵大抵」の記号として使われる

(1)

$$5^n > 10^{19}$$

常用対数をとる
(\log_{10})

$$\log_{10} 5^n > \log_{10} 10^{19}$$

$$n \log_{10} 5 > 19 \log_{10} 10 \quad \log_{10} 10 = 1$$

$$n > \frac{19}{\log_{10} 5} \quad \text{数値計算}$$

定番の夢形

$$\therefore \log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2$$

不等式の計算

$$\textcircled{5} \quad 0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$$

$$-0.31 < -\log_{10} 2 < -0.3$$

$$1-0.31 < 1-\log_{10} 2 < 1-0.3$$

$$0.69 < \log_{10} 5 < 0.7 \quad \log_{10} 5 \text{ の概数}$$

よって

$$\frac{19}{0.7} < \frac{19}{\log_{10} 5} < \frac{19}{0.69}$$

$$27.14... < \frac{19}{\log_{10} 5} < 27.53...$$

よって n は、 $n > \frac{19}{\log_{10} 5}$ とする最小の自然数の値

Memo

$$n = 28 \#$$

$$n > \frac{19}{\log_{10} 5}$$

27.14...

27.53...

(2)

Point 発散速度

関数の種類によらず、数字が大きくなるほど発散速度がとて異なる

$$\sin x \ll \log_a x \ll x^n \ll a^x \quad (0 < a < 1)$$

例えば x に 1, 2, 3, ... を代入した場合、左の関数のほうが圧倒的に大きくなる。

同じ関数でも、底や累乗が異なれば、速度がとて異なる。

$$x^2 \ll x^3 \quad 3^x \ll 4^x$$

例えば: $3^5 = 243$ $3^6 = 729$
 $4^5 = 1024$ $4^6 = 4096$ とはる

$5^m + 4^m > 10^{19}$ での (1) の答えが 28.

m に 28 以外の整数を代入すると、発散速度の考えから

$5^m \gg 4^m$ (5^m の方が圧倒的に大きい) となりそう。

つまり $5^m + 4^m > 10^{19}$ とはる m においては

4^m は 10^{19} を超えるのに、ほとんど貢献してはる。

たから、 $5^n > 10^{19}$ の $n=28$ とはる、 $5^m + 4^m > 10^{19}$ の $m=28$

とはるのでは? と予測

よって $m=27$ で不成立 $5^{27} + 4^{27} < 10^{19} \dots \textcircled{1}$

$m=28$ で成立 $5^{28} + 4^{28} > 10^{19} \dots \textcircled{2}$

とはることを示す。

こんな感じのことを考える

$$5^{28} + 4^{28} > 5^{28} > 10^{19} \quad (\because (1) \text{ の結論})$$

よって $m=28$ で成立する。(2) は OK

$$5^{27} + 4^{27} < 10^{19} \text{ とはることを示す}$$

指数対数の対数をとる、証明しよう。

$$\log(5^m + 4^m) \text{ は } \log 5^m + \log 4^m \text{ とはるからここには注意}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 4^{27} &= 27 \log_{10} 4 \\ &= 27 \times \log_{10} 2^2 \\ &= 27 \times 2 \times \log_{10} 2 \\ &= 54 \times \log_{10} 2 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 54 \times 0.3 &< \log_{10} 4^{27} < 54 \times 0.31 \\ 16.2 &< \log_{10} 4^{27} < 16.74 \end{aligned}$$

$$\text{よ、} 10^{16.2} < 4^{27} < 10^{16.74} \quad (10^{19} \text{ (*) 2桁以上小さい})$$

$$\log_{10} 5^{27} = 27 \log_{10} 5 \quad (*) \quad (1) \text{ (*) } 0.69 < \log_{10} 5 < 0.7$$

$$27 \times 0.69 < \log_{10} 5^{27} < 27 \times 0.7$$

$$18.63 < \log_{10} 5^{27} < 18.9$$

$$\begin{aligned} 10^{18.63} &< 5^{27} < 10^{18.9} \\ 5^{27} + 4^{27} &< 10^{18.9} + 10^{16.74} \quad (**) \\ 10^{19} \text{ (*) 小さいことを示せば} & \\ \text{もう少し詳しく説明する} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 5^{27} &< 18.9 \\ &= 18 + 0.9 \\ &= 18 + 3 \times 0.3 \\ &= 18 + 3 \times \log_{10} 2 \\ &= 18 + \log_{10} 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 5^{27} &< 10^{18.9} \\ &= 10^{18 + \log_{10} 8} \\ &= 10^{18} \times 10^{\log_{10} 8} \\ &= 8 \times 10^{18} \end{aligned}$$

$a^{\log a b} = b$
 (対数の定義から)
 当たり前

$$\text{よ、} 5^{27} + 4^{27}$$

$$\begin{aligned} &< 8 \times 10^{18} + 10^{16.74} \\ &< 8 \times 10^{18} + 10^{18} \quad (10^{18} \text{ に比べて} 2 \text{ と} 2 \text{ も小さい}) \\ &< 9 \times 10^{18} \end{aligned}$$

$$< 10^{19}$$

$$\text{よ、} M = 28 \quad \#$$

わかりやすいと思ふ
この2行を書きまわす
理解できるようにする。解は18
(1) (*) < 10^{19} としてよい。